เวคเตอร์แคลคูลัส

2.1 บทนำ

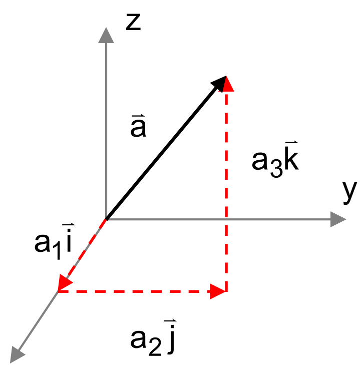
โดยทั่วไปปริมาณทางวิศวกรรมมักแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1) ปริมาณสเกลาร์ เป็นปริมาณที่บอกเฉพาะ “ขนาด” ก็สามารถเข้าใจตรงกันได้อย่างสมบูรณ์ เช่น อุณหภูมิ ความดัน เป็นต้น และ

2) ปริมาณเวคเตอร์ เป็นปริมาณที่ต้องบอกทั้ง “ขนาด” และ “ทิศทาง” จึงจะเข้าใจได้อย่างสมบูรณ์ เช่น แรงขนาด 30 N กระทำในแนวระนาบจากซ้ายไปขวา เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีปริมาณทางเวคเตอร์อื่นๆ อีก อาทิ ความเร็ว ความเร่ง โมเมนตัม

2.2 นิยามทั่วไปเกี่ยวกับเวคเตอร์

เรานิยมเขียนแทนเวคเตอร์ด้วยลูกศรที่กำกับด้วยตัวอักษร เช่น $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ โดยมักเขียนแจกแจงในรูปองค์ประกอบของเวคเตอร์ซึ่งประกอบด้วยขนาดกับทิศทางในรูปของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) ดังแสดงในรูป



รูปที่ 2.1 เวคเตอร์และองค์ประกอบของเวคเตอร์

จากรูปเวคเตอร์ $\vec{a}$ เขียนแจกแจงในรูปองค์ประกอบได้เป็น

$$\bar{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k} \tag{2.1}$$

โดยที่ $\bar{i} = [1, 0, 0]$, $\bar{j} = [0, 1, 0]$ และ $\bar{k} = [0, 0, 1]$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x, y, และ z ตามลำดับ ส่วน a_1, a_2 และ a_3 เป็นองค์ประกอบของเวคเตอร์ $\bar{a}$ ในทิศทาง x, y, และ z ตามลำดับ

ขนาดของเวคเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ เช่น $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$, $|\bar{v}|$ อ่านว่า ขนาดของเวคเตอร์ "…" (ไม่ได้อ่านว่า absolute ของ "…") หากเป็นเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย จะเรียกว่า เวคเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) โดยเวคเตอร์ขนาดใด ๆ สามารถหาขนาดและสร้างให้เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยได้ดังนี้

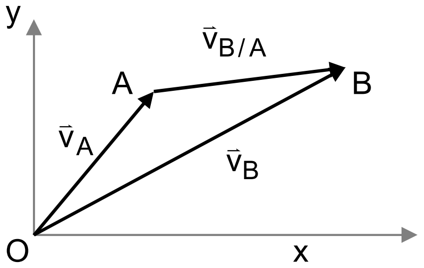
$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2} \tag{2.2}$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}} (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}) \tag{2.3}$$

โดยเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{n}$ จะชี้ในทิศทางเดียวกับเวคเตอร์ $\bar{a}$

จากรูปที่ 2.2 กำหนดเวคเตอร์ $\bar{v}_A$ และ $\bar{v}_B$ ที่ลากจากจุดเริ่มต้น O และสิ้นสุดที่จุด A และ B ตามลำดับ เรียกเวคเตอร์ที่วัดอิงเทียบกับจุดเริ่มต้นว่า "เวคเตอร์สัมบูรณ์ (absolute vector)" ส่วนเวคเตอร์ที่วัดเริ่มจากปลาย $\bar{v}_A$ และสิ้นสุดที่ปลาย $\bar{v}_B$ เขียนเป็น $\bar{v}_{B/A}$ เรียกว่า "เวคเตอร์สัมพัทธ์ (relative vector)" เป็นการวัดการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์หนึ่งเทียบกับอีกเวคเตอร์หนึ่ง เช่น วัดความเร็วของรถยนต์คันหนึ่งเทียบกับรถยนต์อีกคันหนึ่งที่วิ่งอยู่ใกล้กัน เรียกว่าความเร็วสัมพัทธ์ เป็นต้น เขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \qquad (2.4)$$

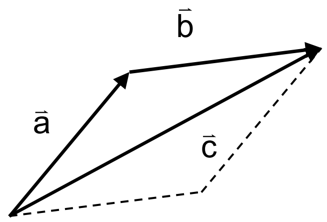


รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างเวคเตอร์

2.3 การดำเนินการทางเวคเตอร์

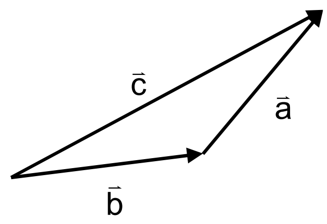
2.3.1 การบวก/ลบเวคเตอร์

1) การบวกเวคเตอร์



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

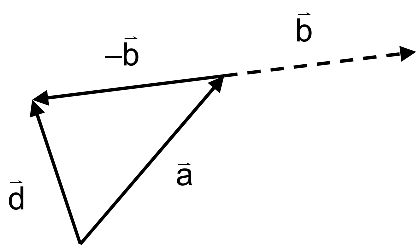
หรือ



$\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$

ดังนั้นจึงได้ว่า $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

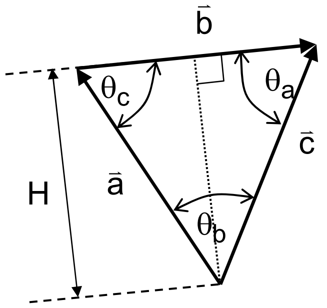
2) การลบเวคเตอร์ (ใช้หลักการบวกเวคเตอร์ โดยการบวกด้วยเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่าเดิมแต่มีทิศทางตรงข้าม)



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

โดย $-\vec{b}$ หมายถึงเวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{b}$ แต่ทิศทางตรงข้ามกัน

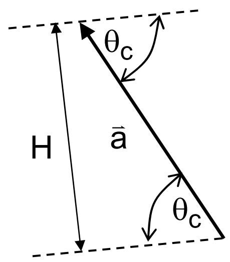
ในทางเรขาคณิตและตรีโกณมิติเมื่อเวคเตอร์รวมกันอยู่ หากเรารู้ขนาดและทิศทางของเวคเตอร์ 1 ด้าน และรู้มุมประกอบทั้งสามมุม (ซึ่งต้องเป็นมุมแหลมเท่านั้น) เราสามารถหาขนาดแลกะทิศทางของเวคเตอร์ด้านที่เหลือได้ เช่น รู้ขนาดของเวคเตอร์ $\vec{a}$ ขนาดของมุม θ_a , θ_b และ θ_c ดังรูป เราสามารถหาเวคเตอร์ $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ได้ดังนี้



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

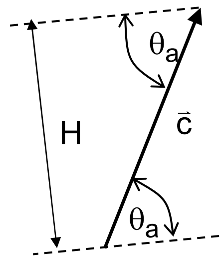
จึงได้ความสัมพันธ์ว่า

$$|\vec{a}|\sin\theta_c = H$$



และ

$$|\vec{c}|\sin\theta_a = H$$



ดังนั้นจึงได้ว่า $|\vec{a}|\sin\theta_c = |\vec{c}|\sin\theta_a$ หรือ $\dfrac{|\vec{a}|}{\sin\theta_a} = \dfrac{|\vec{c}|}{\sin\theta_c}$

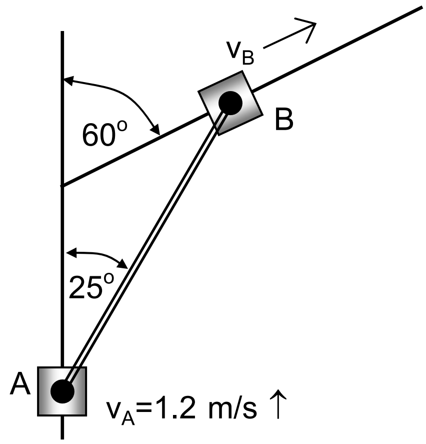
ในขณะเดียวกันก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin\theta_a} = \frac{|\vec{c}|}{\sin\theta_c} = \frac{|\vec{b}|}{\sin\theta_b} \tag{2.5}$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นเรียกว่า “กฏไซน์” (sine law) ซึ่งข้อควรระวังในการใช้งานคือมุมประกอบทั้ง 3 มุมต้องเป็นมุมแหลม

ตัวอย่าง 2.1 ปัญหาทางวิศวกรรมที่ใช้หลักการรวมและวิเคราะห์ทางเวคเตอร์ เช่น การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของกลไกดังแสดงในรูป จงหา $\vec{v}_B$ และ $\vec{v}_{B/A}$

วิธีทำ จากรูปจะได้สิ่งที่รู้และยังไม่รู้ดังแสดงในตาราง

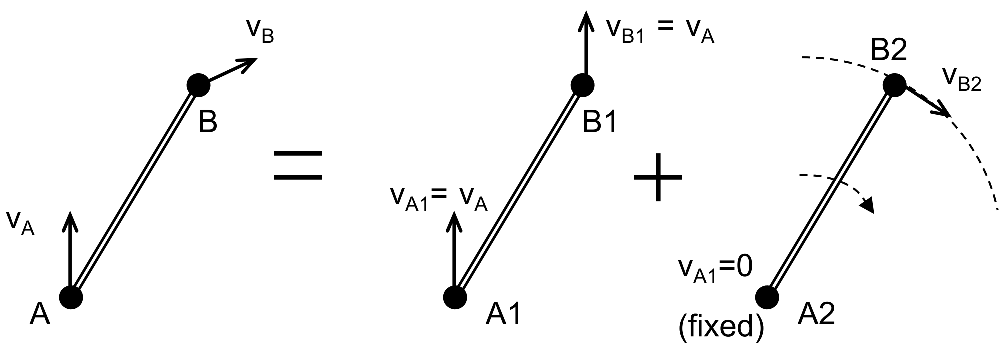


	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{B/A}$
ขนาด	✓	×	×
ทิศทาง	✓	✓	×

จากความสัมพันธ์

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \qquad \text{(a)}$$

จากรูปการวิเคราะห์ระบบใหญ่โดยตรงจะยากและซับซ้อน จึงได้แยกระบบใหญ่ออกเป็น 2 ระบบย่อย โดยเขียนเป็น FBD (Free Body Diagram) ได้ดังนี้



(ระบบใหญ่) (ระบบย่อย 1) (ระบบย่อย 2)

รายละเอียดการวิเคราะห์เป็นดังนี้

ระบบย่อยที่ 1 กำหนดตลอดทั้งแท่งเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วและทิศทางเดียวกับปลอก A ดังนั้นจึงได้

$\bar{v}_{A1} = \bar{v}_A$ และ $\bar{v}_{B1} = \bar{v}_A$ ทิศทาง $\uparrow$ (b)

ระบบย่อยที่ 2 พิจารณาที่ปลอก A เพื่อให้ความเร็วของระบบใหญ่และระบบย่อยสอดคล้องกัน ผลรวมของความเร็วของระบบย่อยจึงต้องได้ขนาดและทิศทางเท่ากับระบบใหญ่ ดังนั้นจึงได้ว่า

$\bar{v}_{A1} + \bar{v}_{A2} = \bar{v}_A$ ทิศทาง $\uparrow$ (c)

แต่เนื่องจากระบบย่อยที่ 1 ได้กำหนดให้ $\bar{v}_{A1} = \bar{v}_A$ แล้ว ดังนั้นจึงได้ว่า $\bar{v}_{A2} = 0$ ใช้เงื่อนไขความสอดคล้องเช่นเดียวกันจะได้ความสัมพันธ์ที่ปลอก B เป็นดังนี้

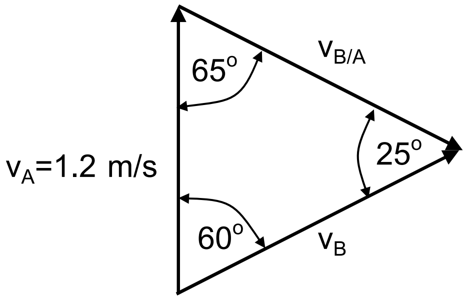
$\bar{v}_{B1} + \bar{v}_{B2} = \bar{v}_B$ ทิศทาง $\measuredangle 60^\circ$ (d)

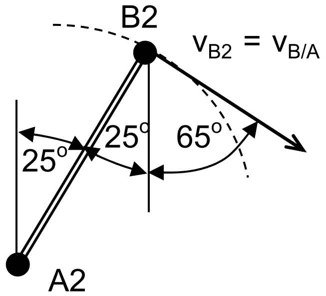
เนื่องจาก $\bar{v}_{A2} = 0$ หมายความว่าจุด A2 ถูกตรึงให้อยู่กับที่ ดังนั้นจึงส่งผลให้จุด B2 เคลื่อนที่ได้ในลักษณะเดียวคือหมุนรอบจุด A2 เท่านั้น ซึ่งลักษณะการเคลื่อนที่แบบหมุนนั้นเวคเตอร์ความเร็วจะอยู่ในแนวสัมผัสโค้งการเคลื่อนที่และตั้งฉากกับรัศมีการหมุน

เนื่องจาก $\bar{v}_{B1} = \bar{v}_A$ (สมการ (b)) ความสัมพันธ์สมการ (d) จึงได้เป็น

$\bar{v}_A + \bar{v}_{B2} = \bar{v}_B$ หรือ $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B2}$ (e)

เปรียบเทียบสมการ (e) กับสมการ (a) จึงได้ $\bar{v}_{B2} = \bar{v}_{B/A}$ จากนั้นใช้หลักการรวมเวคเตอร์ได้เป็นดังรูป





ใช้กฎไซน์วิเคราะห์หา v_B และ $v_{B/A}$ ได้ดังนี้

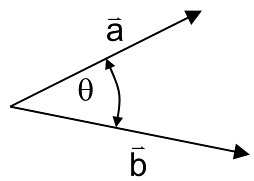
$$\frac{1.2}{\sin 55^o} = \frac{v_B}{\sin 65^o} = \frac{v_{B/A}}{\sin 60^o} \qquad \text{(f)}$$

แก้สมการได้ v_B = 1.328 m/s และ $v_{B/A}$ = 1.269 m/s

หลักการข้างต้นเรียกว่า “Super positioning” ซึ่งเป็นการแยกระบบใหญ่ออกเป็นระบบย่อยหลายระบบเพื่อสะดวกต่อการวิเคราะห์ ก่อนนำผลวิเคราะห์ของระบบย่อยมารวมกันเป็นระบบใหญ่ในภายหลัง

2.3.2 Scalar Product (Dot product)

กำหนดเวคเตอร์ $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวคเตอร์ทั้งคู่ ดังรูป



การดำเนินการ Dot product ของเวคเตอร์ให้นิยามดังนี้

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad (2.6)$$

ซึ่งได้ข้อสรุปว่า $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ เมื่อ $\theta < 90^\circ$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ เมื่อ $\theta = 90^\circ$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ เมื่อ $\theta > 90^\circ$

นอกจากนี้ยังสามารถหาค่าได้โดยใช้วิธีกระจายพจน์ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\,(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) \\
&= \left[a_1b_1(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1b_3(\vec{i}\cdot\vec{k})\right]+ \\
&\quad \left[a_2b_1(\vec{j}\cdot\vec{i})+a_2b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+a_2b_3(\vec{j}\cdot\vec{k})\right]+ \\
&\quad \left[a_3b_1(\vec{k}\cdot\vec{i})+a_3b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+a_3b_3(\vec{k}\cdot\vec{k})\right]
\end{aligned} \qquad (2.7)
$$

$$= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

ข้อสังเกตของการดำเนินการ Dot product คือ

1) ผล Dot product ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกนพิจารณาได้ดังนี้

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ และ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$

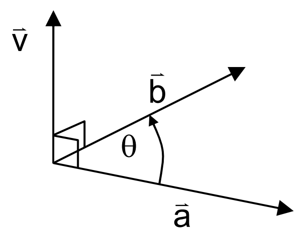
(เพราะเวคเตอร์ $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$ ค่า $\cos\theta=0$)

2) การ Dot ของเวคเตอร์จะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์เสมอ

3) การ Dot ของเวคเตอร์มีคุณสมบัติการสลับที่หรือ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2.3.3 Vector Product (Cross Product)

กำหนดเวคเตอร์ $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ และ $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ ทำมุมกัน θ ดังแสดงในรูป



การดำเนินการ Cross product ของเวคเตอร์ให้นิยามดังนี้

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta \qquad (2.8)$$

ดังนั้นเวคเตอร์ที่ทำมุมกัน 0 หรือ 180 องศา เมื่อ Cross กันจะได้ผลลัพธ์เท่ากับศูนย์ โดยหาก $\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}$ เวคเตอร์ลัพธ์ $\vec{v}$ ที่ได้จะตั้งฉากกับเวคเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ และมีทิศทางเป็นไปตามกฎมือขวา ดังแสดงในรูป

ในทางปฏิบัติเราคำนวณ Cross product โดยใช้หลักการหาดีเทอมิแนนต์อันดับสาม (3[rd]-order determinant) ดังนี้

$$\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2\end{array}\right| \qquad (2.9)$$

$$\vec{v}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\vec{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}$$
$$=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$$

โดยที่ $v_1=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}$, $\qquad v_2=\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}$, $\qquad v_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$

หรือใช้วิธีกระจายพจน์ได้เป็นดังนี้

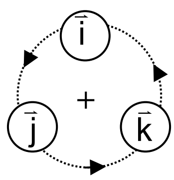
$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\times\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)\\ &=\left[a_1b_1\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_1b_2\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_1b_3\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)\right]+\\ &\quad\left[a_2b_1\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_2b_2\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_2b_3\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)\right]+\\ &\quad\left[a_3b_1\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_3b_2\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_3b_3\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)\right]\end{aligned} \qquad (2.10)$$

$$\begin{aligned}&=\left(a_1b_2\right)\vec{k}-\left(a_1b_3\right)\vec{j}-\left(a_2b_1\right)\vec{k}+\left(a_2b_3\right)\vec{i}+\left(a_3b_1\right)\vec{j}-\left(a_3b_2\right)\vec{i}\\ &=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\vec{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}\end{aligned}$$

ข้อสังเกตของการ Cross product คือ

1) การ Cross เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกนได้ผลดังนี้

$$\begin{array}{lll}\vec{i}\times\vec{i}=0; & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}; & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}; & \vec{j}\times\vec{j}=0; & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}; & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}; & \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}$$



2) การ Cross ของเวคเตอร์จะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวคเตอร์

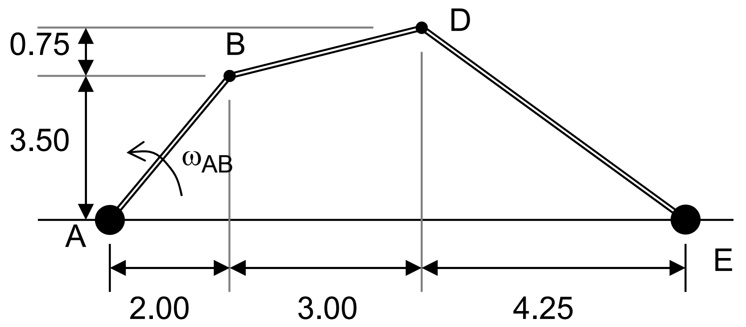
3) การ Cross ของเวคเตอร์ไม่มีสมบัติการสลับที่ หรือ $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ แต่

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

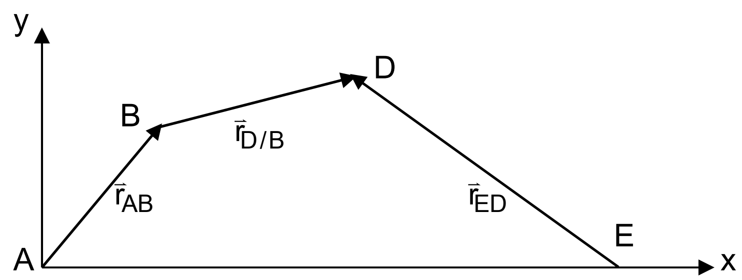
4) การ Cross เวคเตอร์ไม่มีสมบัติการจัดกลุ่ม หรือ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

เช่น $\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ ส่วน $(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j}=\vec{0}\times\vec{j}=\vec{0}$

ตัวอย่าง 2.2 ปัญหาทางวิศวกรรมที่ใช้หลักการ Cross ของเวคเตอร์ เช่น การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของกลไกที่มีความเร็ว $\vec{v}$ และความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ดังแสดงในรูป เมื่อกำหนดให้ก้าน AB หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_{AB}=20\,\text{rad/s}$ จงหาควมเร็วเชิงมุมของก้าน BD และ ED ตามลำดับ



วิธีทำ แสดงเป็นเวคเตอร์ได้ดังนี้ (แกน z พุ่งออกตั้งฉากกับหน้ากระดาษ)



เวคเตอร์แต่ละตัวแจกแจงพิกัดได้ดังนี้

$$\vec{r}_{AB}=2.00\,\vec{i}+3.50\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_{ED}=-4.25\,\vec{i}+4.25\,\vec{j} \qquad \text{(a)}$$

$$\vec{r}_{D/B}=3.00\,\vec{i}+0.75\,\vec{j}$$

เนื่องจากจุด A และ E ถูกตรึงไว้กับที่ ดังนั้นจึงได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_E = 0 \qquad \text{(b)}$$

ก้าน AB หมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}_{AB}$ เนื่องจากเป็นการหมุนรอบแกน z ดังนั้นใช้กฎมือขวาจึงได้

$$\vec{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\vec{k} = 20\vec{k}\ \text{rad/s} \qquad \text{(c)}$$

เนื่องจากยังไม่รู้ว่า $\vec{\omega}_{D/B}$ และ $\vec{\omega}_{ED}$ หมุนในทิศทางใด ฉะนั้นจึงสมมุติให้มีทิศทางเดียวกับ $\vec{\omega}_{AB}$ คือหมุนรอบแกน z ในทิศทวนเข็มนาฬิกา จึงได้ว่า

$$\vec{\omega}_{D/B} = \omega_{D/B}\vec{k} \quad \text{และ} \quad \vec{\omega}_{ED} = \omega_{ED}\vec{k} \qquad \text{(d)}$$

จากความสัมพัทธ์ระหว่างจุด D และ B ของก้าน BD จะได้ว่า

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{D/B} \qquad \text{(e)}$$

แทนความสัมพันธ์ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ลงในสมการ (e) ได้เป็น

$$\vec{\omega}_{ED} \times \vec{r}_{ED} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{D/B} \times \vec{r}_{D/B}$$

แทนค่าได้เป็น

$$\begin{aligned}\omega_{ED}\vec{k} \times (-4.25\vec{i} + 4.25\vec{j}) &= 20\vec{k} \times (2.00\vec{i} + 3.50\vec{j}) + \\ &\quad \omega_{D/B}\vec{k} \times (3.00\vec{i} + 0.75\vec{j}) \end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

จากสมการ (f) ทำการ cross เวคเตอร์และจัดรูปได้เป็น

$$-4.25\omega_{ED}\vec{j} - 4.25\omega_{ED}\vec{i} = 40\vec{j} - 70\vec{i} + 0.3\omega_{D/B}\vec{j} - 0.75\omega_{D/B}\vec{i}$$

เทียบองค์ประกอบสำหรับแต่ละเวคเตอร์ได้เป็น

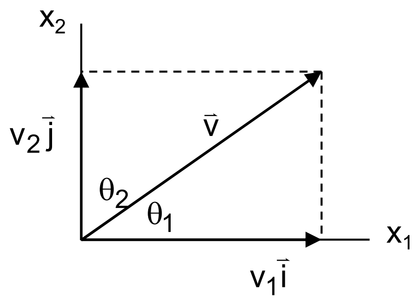
ทิศทาง $\vec{i}$: $\quad -4.25\omega_{ED} = -70 - 0.75\omega_{D/B}$

ทิศทาง $\vec{j}$: $\quad -4.25\omega_{ED} = 40 + 0.3\omega_{D/B}$

แก้สมการได้ค่า $\omega_{D/B} = -29.3\,\text{rad/s}$ และ $\omega_{ED} = 11.3\,\text{rad/s}$

2.3.4 โคไซน์แสดงทิศทาง (Direction cosines)

กำหนดเวคเตอร์ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ แสดงดังรูป โดย θ_1 และ θ_2 เป็นมุมระหว่างเวคเตอร์ $\vec{v}$ กับแกน x_1 และ x_2 ตามลำดับ (ในที่นี้จงใจแสดงรูปใน 2 มิติเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ให้นักศึกษาคิดต่อยอดว่ามันมีแกน x_3 และ θ_3 อยู่ด้วยเช่นกัน)



จากรูปใช้ความรู้มัธยมศึกษาเรื่องตรีโกณมิติ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$v_1 = |\bar{v}|\cos\theta_1, \quad v_2 = |\bar{v}|\cos\theta_2, \quad v_3 = |\bar{v}|\cos\theta_3 \tag{2.11a}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{v_1}{|\bar{v}|} = l, \quad \cos\theta_2 = \frac{v_2}{|\bar{v}|} = m, \quad \cos\theta_3 = \frac{v_3}{|\bar{v}|} = n \tag{2.11b}$$

เรียก l, m, n ว่าโคไซน์แสดงทิศทางของเวคเตอร์ $\bar{v}$ บนแกน x_1, x_2, x_3 ตามลำดับ ดังนั้นจึงได้

$$v_1 = |\bar{v}|\,l, \quad v_2 = |\bar{v}|\,m, \quad v_3 = |\bar{v}|\,n \tag{2.11c}$$

จาก $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$ แทนค่าด้วยสมการที่ (2.11c) ได้เป็น

$$\bar{v} = |\bar{v}|\,(l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}) \tag{2.11d}$$

ฉะนั้น $l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k} = \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ จึงเป็นรูปแบบของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\bar{v}$ นั่นเอง ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1 \quad \text{หรือ} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{2.11e}$$

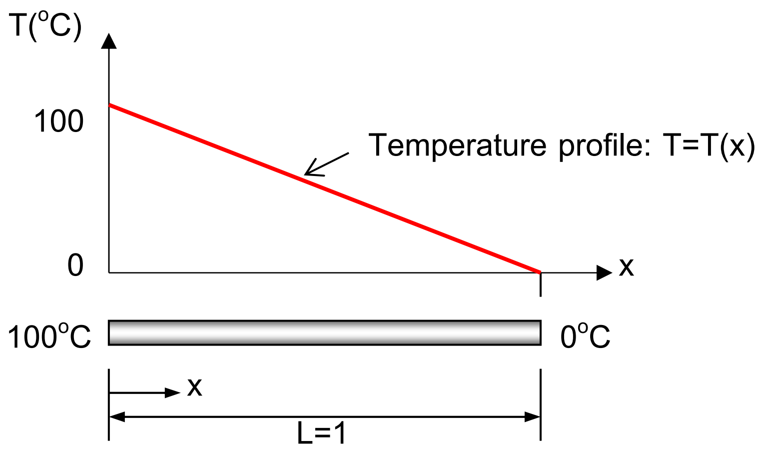
หลักการของโคไซน์แสดงทิศทางมีความสำคัญต่อการวิเคราะห์พิกัดและการแปลงพิกัดมาก ซึ่งถูกประยุกต์ใช้หลายด้านในงานวิศวกรรมเครื่องกล นักศึกษาจะได้เรียนรู้ในบทถัดไป

2.4 สนามเวคเตอร์และสนามสเกลาร์

สนามเวคเตอร์และสนามสเกลาร์มักถูกอธิบายด้วยฟังก์ชันในรูปของฟังก์ชันเวคเตอร์และฟังก์ชันสเกลาร์ ตามลำดับ

1) ฟังก์ชันสเกลาร์ (scalar function) หมายถึงปริมาณสเกลาร์ที่มีค่าเปลี่ยนไปตามพิกัดหรือตัวแปรอิสระอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น การกระจายอุณหภูมิบนแท่งโลหะ ดังแสดงในรูปที่ 2.3

จากรูปขอบด้านซ้ายของแท่งโลหะมีอุณหภูมิ 100^{o}C ขอบขวาอุณหภูมิ 0^{o}C การกระจายอุณหภูมิบนแท่งโลหะเรียกว่า “โปรไฟล์อุณหภูมิ” จะมีลักษณะเป็นเชิงเส้นตรง โดยมีค่าเปลี่ยนไปตามพิกัด x ดังนั้นอุณหภูมิ (ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์) จึงเป็นฟังก์ชันของพิกัด x หรือ T=T(x)



รูปที่ 2.3 ตัวอย่างของฟังก์ชันสเกลาร์

จากรูปที่ 2.3 นักศึกษาสามารถหาการแจกแจงของอุณหภูมิ T(x) ได้ไม่ยาก โดยหาความชันและสร้างเป็นสมการเส้นตรง ดังนี้

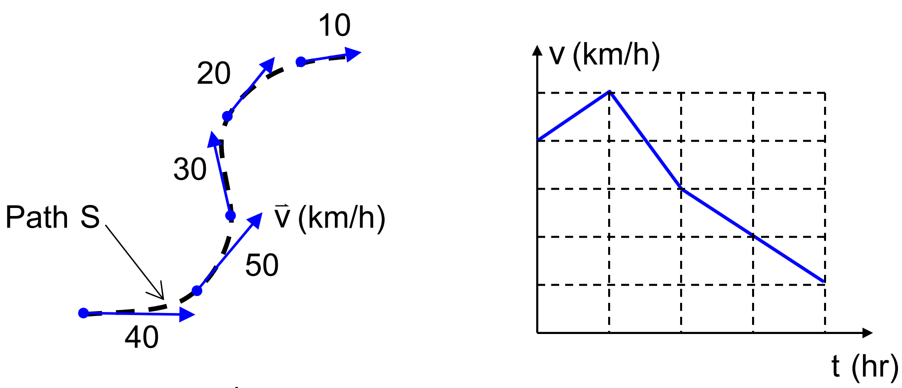
ความชัน $$m=\frac{\Delta T}{\Delta x}=\frac{T_2-T_1}{x_2-x_1}=\frac{0-100}{1-0}=-100$$

สมการเส้นตรง $$T-T_1=m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad T-100=-100(x-0)$$

ดังนั้น แจกแจงอุณหภูมิอยู่ในรูปสมการ $T(x)=-100x+100$

2) ฟังก์ชันเวคเตอร์ (vector function) หมายถึงปริมาณสเวคเตอร์ที่มีค่าเปลี่ยนไปตามพิกัดหรือตัวแปรอิสระอื่นที่เกี่ยวข้อง เช่น ความเร็วของรถยนต์ที่เปลี่ยนไปในขณะที่วิ่งบนเส้นทาง S ดังแสดงในรูปที่ 2.4

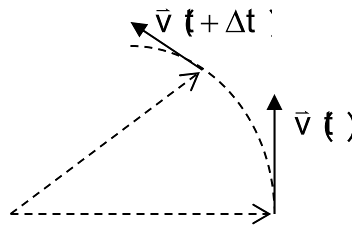
จากรูปรถยนต์ออกตัวด้วยความเริ่มต้นด้วยความเร็ว 40 km/h เพื่อวิ่งไปตามเส้นทาง S ในขณะวิ่งไปความเร็วและทิศทางของรถยนต์ก็เปลี่ยนไปตามระยะเวลาที่วิ่งไป ดังนั้นความเร็ว (ซึ่งเป็นปริมาณเวคเตอร์) จึงเป็นฟังก์ชันของเวลา t หรือ $\bar{v}=\bar{v}(t)=[v_1(t),v_2(t),v_3(t)]$ ซึ่งสามารถเขียนกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเมื่อเวลาเปลี่ยนไปได้ดังกราฟด้านล่าง



รูปที่ 2.4 ตัวอย่างของฟังก์ชันเวคเตอร์

ในขณะเดียวกันนักศึกษาก็อาจตั้งข้อสังเกตได้ว่าเส้นทาง S ก็เป็นเวคเตอร์ได้ และเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลาเช่นเดียวกัน เพราะมีการเปลี่ยนพิกัดเมื่อเวลาเปลี่ยนไป หรืออยู่ในรูป $\bar{S}=\bar{S}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$ นั่นเอง

เนื่องจากเวคเตอร์มีองค์ประกอบที่ขึ้นกับทิศทางและเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น การหาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเวคเตอร์จึงต้องใช้หลักการอนุพันธ์ย่อย เช่น การเปลี่ยนแปลงความเร็ว $\vec{v}$ ที่เวลาเปลี่ยนไปดังแสดงในรูป



หาการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลาได้เป็นดังนี้

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (2.12a)$$

เนื่องจากเวคเตอร์ความเร็วมีองค์ประกอบทั้งในทิศทาง x ,y และ z จึงเขียนได้เป็น $\vec{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)]$ ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงความเร็วจึงได้เป็น

$$\vec{v}'(t) = [v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t)] = \frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t}\vec{k} \qquad (2.12b)$$

<u>ตัวอย่าง 2.3</u> วัตถุเคลื่อนที่ไปเป็นบนเส้นทาง $\vec{r} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}$ เป็นระยะเวลา Δt จงหาความเร็ว ความเร่ง ของการเคลื่อนที่ดังกล่าว

<u>วิธีทำ</u> ความเร็วหาได้จากการเปลี่ยนแปลงระยะทางเทียบกับเวลา

$$\vec{v}(t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -\omega R\sin\omega t\,\vec{i} + \omega R\cos\omega t\,\vec{j}$$
$$= v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

เมื่อ $v_1 = -\omega R\sin\omega t$ และ $v_2 = \omega R\cos\omega t$ ดังนั้นขนาดความเร็วหาได้ดังนี้

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-\omega R\sin\omega t)^2 + (\omega R\cos\omega t)^2}$$
$$= \sqrt{(\omega R)^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \omega R$$

ความเร่งหาได้จากการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลา

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\omega^2 R\cos\omega t\,\vec{i} - \omega^2 R\sin\omega t\,\vec{j}$$
$$= -\omega^2 (R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}) = -\omega^2 \vec{r}$$

ขนาดของความเร่งหาได้ดังนี้

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-\omega^2 R\cos\omega t)^2 + (-\omega^2 R\sin\omega t)^2}$$
$$= \sqrt{(\omega^2 R)^2 (\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \omega^2 R$$

2.5 การดำเนินการทางสนามเวคเตอร์และสนามสเกลาร์

2.5.1 เกรเดียนต์

เกรเดียนต์เป็นการดำเนินการทางสนามสเกลาร์ เป็นการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของปริมาณสเกลาร์เทียบกับพิกัด เช่น การกระจายอุณหภูมิบนแท่งโลหะ 1 มิติ ดังแสดงในรูปที่ 2.3 จะเห็นว่าอุณหภูมิเปลี่ยนตามพิกัด x ที่เปลี่ยนไป หรือ T=T(x) ซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$\frac{\Delta T}{\Delta x}$ หรือ (ในทางแคลคูลัส) $\frac{dT}{dx}$

และเพื่อให้ชัดเจนว่าการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวเป็นไปในทิศทาง x เราจึงเขียนกำกับด้วยเวคเตอร์กำกับทิศทางได้เป็น $\frac{dT}{dx}\vec{i}$

ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นในหลายมิติหรือเทียบต่อหลายทิศทาง เช่น กรณีการกระจายความร้อนบนก้อนโลหะ 3 มิติ เราจะได้ T=T(x, y, z) เราจึงได้ความสัมพันธ์ที่ใช้การเปลี่ยนแปลงในรูปแบบดังนี้

$$\frac{dT}{dx}\vec{i} + \frac{dT}{dy}\vec{j} + \frac{dT}{dz}\vec{k}$$

เรียกการดำเนินการรูปแบบนี้ว่า “เกรเดียนต์” เขียนย่อเป็น grad (T) หรือ $\vec{\nabla}T$

ดังนั้น หากกำหนดให้ ϕ เป็นปริมาณสเกลาร์ เกรเดียนต์ของ ϕ ให้นิยามเป็นดังนี้

$$\text{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.13)$$

โดย $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ ($\vec{\nabla}$ อ่านว่า nabla หรือ del) เป็นตัวดำเนินการทางเวคเตอร์ (vector operator)

ข้อสังเกตเกี่ยวกับเกรเดียนต์คือ

1) ตัวแปรสเกลาร์เท่านั้นที่สามารถนำไปดำเนินการเกรเดียนต์ได้

2) การดำเนินการเกรเดียนต์ให้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวคเตอร์ ดังนั้น เกรเดียนต์จึงใช้เพื่อ "แปลงสนามสเกลาร์ให้เป็นสนามเวคเตอร์"

<u>ตัวอย่าง 2.4</u> กำหนดปริมาณสเกลาร์ $\phi=2x+yz-3y^2$ จงหาเกรเดียนต์ของ ϕ

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของเกรเดียนต์ $\text{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{grad}\phi &=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+yz-3y^2\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+yz-3y^2\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(2x+yz-3y^2\right)\vec{k}\\ &=2\vec{i}+\left(z-6y\right)\vec{j}+y\vec{k}\end{aligned}$$

2.5.2 ไดเวอร์เจนต์

ไดเวอร์เจนต์เป็นการดำเนินการทางสนามเวคเตอร์ เป็นการหาการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเวคเตอร์เทียบกับพิกัด หากกำหนด $\bar{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ เป็นปริมาณเวคเตอร์ ไดเวอร์เจนต์ของ $\bar{a}$ เขียนแทนด้วย $\text{div}\bar{a}$ หรือ $\vec{\nabla}\cdot\bar{a}$ ให้นิยามดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\text{div}\bar{a}=\vec{\nabla}\cdot\bar{a} &=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\\ &=\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.14}$$

ข้อสังเกตเกี่ยวกับไดเวอร์เจนต์คือ

1) ตัวแปรเวคเตอร์เท่านั้นที่สามารถนำไปดำเนินการไดเวอร์เจนต์ได้

2) การดำเนินการไดเวอร์เจนต์ให้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้น ไดเวอร์เจนต์จึงใช้เพื่อ “แปลงสนามเวคเตอร์ให้เป็นสนามสเกลาร์”

<u>ตัวอย่าง 2.5</u> กำหนดเวคเตอร์ $\bar{a} = 3xz\bar{i} + 3xy\bar{j} - yz^2\bar{k}$ จงหาไดเวอร์เจนต์ของเวคเตอร์ $\bar{a}$

<u>วิธีทำ</u> เทียบรูปแบบกับ $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ จึงได้ $a_1 = 3xz$, $a_2 = 3xy$ และ $a_3 = -yz^2$ และจากนิยามของไดเวอร์เจนต์ $\mathrm{div}\bar{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\bar{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(3xz) + \frac{\partial}{\partial y}(3xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-yz^2) \\ &= 3z + 3x - 2yz\end{aligned}$$

2.5.3 เคิร์ล

กำหนด $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ เป็นปริมาณเวคเตอร์ เคิร์ลของ $\bar{a}$ หาได้จากรูปแบบดังนี้

$$\mathrm{curl}\bar{a} = \bar{\nabla} \times \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \times \left(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}\right)$$

$$= \left|\begin{array}{ccc:cc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & \bar{i} & \bar{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \end{array}\right| \quad - \quad + \qquad (2.15)$$

$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\bar{k}$$

ข้อสังเกตเกี่ยวกับเคิร์ลคือ

1) ตัวแปรเวคเตอร์เท่านั้นที่สามารถนำไปดำเนินการเคิร์ลได้

2) การดำเนินการเคิร์ลให้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวคเตอร์

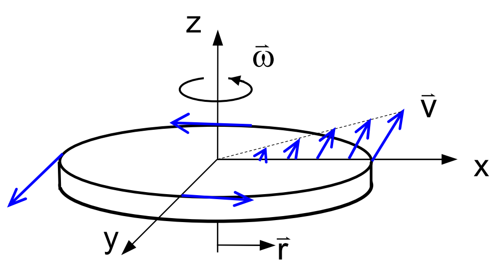
<u>ตัวอย่าง 2.6</u> กำหนดปริมาณเวคเตอร์ $\vec{a} = yz\vec{i} + 3xz\vec{j} + z\vec{k}$ จงหาเคิร์ลของ $\vec{a}$

<u>วิธีทำ</u> เทียบรูปกับ $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ จะได้ $a_1 = yz$, $a_2 = 3xz$ และ $a_3 = z$ ดังนั้น จากนิยามของเคิร์ลจึงได้ว่า

$$\mathrm{curl}\,\vec{a} = \left| \begin{array}{ccc:cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \end{array} \right| \quad - \quad + \quad = -3x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> แผ่นดิสก์กลมหมุนทวนเข็มนาฬิการอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω จงหาเคิร์ลของสนามความเร็วของแผ่นดิสก์

<u>วิธีทำ</u>



พิกัดใดๆ บนแผ่นดิสก์กลมคือ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ และเวคเตอร์ความเร็วเชิงมุม (ตามกฎมือขวา) $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ สนามความเร็วของการหมุนหาได้จาก

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\vec{k} \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$$

ดังนั้น เคิร์ลของสนามความเร็วของแผ่นดิสก์หาได้จาก

$$\mathrm{curl}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}$$

สรุปได้ว่า เคิร์ลของสนามความเร็วของการหมุนจะมีทิศทางเดียวกับหารหมุน และมีขนาดเป็น 2 เท่าของความเร็วเชิงมุมของการหมุน บางครั้งเรียกเคิร์

ลของสนามความเร็วของการหมุน curl$\bar{v}$ ว่า rot$\bar{v}$ (rotation) ซึ่งหลักการนี้นักศึกษาจะได้เรียนในรายวิชาด้านกลศาสตร์ของไหล

2.5.4 ลาปลาเชียน

ลาปลาเชียนเป็นรูปแบบการดำเนินการที่พบค่อนข้างบ่อยในสมการควบคุมต่างๆ ทางวิศวกรรมเครื่องกล โดยเฉพาะสมการควบคุมเกี่ยวกับการแพร่ เช่น สมการควบคุมการนำความร้อน สมการควบคุมการไหลสำหรับพจน์การกระจายความหนืด เป็นต้น เป็นการดำเนินการที่ใช้สำหรับตัวแปรสเกลาร์ กำหนดให้ ϕ เป็นปริมาณหรือสนามสเกลาร์ ลาปลาเชียนของ ϕ ให้นิยามดังนี้

$$\bar{\nabla}^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{2.16}$$

โดย $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (อ่านว่า Laplacian operator) เป็นตัวดำเนินการทางสเกลาร์

ข้อสังเกตเกี่ยวกับการดำเนินการลาปลาเชียนคือ

1) ตัวแปรที่สามารถนำไปดำเนินการลาปลาซได้นั้น ต้องเป็นตัวแปรของปริมาณสเกลาร์เท่านั้น

2) การดำเนินการลาปลาซจะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์

3) $\bar{\nabla}^2\phi = \text{div}\,(\text{grad}\phi) = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\phi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> การกระจายอุณหภูมิบนก้อนโลหะก้อนหนึ่งเป็นไปตามสมการ $T = 2x + yz - 3y^3$ จงหาลาปลาเชียนของการกระจายดังกล่าว

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของลาปลาเชียน $\bar{\nabla}^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\vec{\nabla}^2 T = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x + yz - 3y^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x + yz - 3y^3) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(2x + yz - 3y^3)$$
$$= 0 + (-6) + 0$$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. กำหนด $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{k}$ และ $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ จงหา

   1.1) $(\vec{a} - \vec{c})\vec{b}$ 1.2) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$

   1.3) $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|$
2. กำหนดให้ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ จงแสดงว่า $\vec{b} = \vec{c}$
3. จงหาเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{a}$ ซึ่งตั้งฉากกับเวคเตอร์ $2\vec{i} - 5\vec{j}$
4. จงพิสูจน์ว่า $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ และ $\vec{c} = -10\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน
5. กำหนดให้ $\vec{a} = a_1\vec{i} + 2\vec{j}$ และ $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ ตั้งฉากกัน จงหาค่า a_1
6. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง $3x + 5y = 1$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $10x - 6y = 7$
7. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $4x - y = 2$ และ $x + 4y = 3$
8. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x + y = 1$ และ $2x - 3y = 0$
9. กำหนดให้ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{d} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$ จงหาค่าต่อไปนี้

   9.1) $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{d}$ 9.2) $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \cdot \vec{d}$

   9.3) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d})$
10. จงหาเกรเดียนต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

    10.1) xy 10.2) $\frac{1}{4}x^2 + y^2$

    10.3) $x^2 + y^2$ 10.4) x/y

10.5) $e^x \sin y$ 10.6) $\sin x \sinh y$

10.7) $yz + zx + xy$ 10.8) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$

11. จงหาไดเวอร์เจนต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

11.1) $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 11.2) $y^2e^z\vec{i} + x^2z^2\vec{k}$

11.3) $yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 11.4) $e^{-xy}\vec{i} + e^{-yz}\vec{j} + e^{-zx}\vec{k}$

11.5) $\cos x \cosh y\vec{i} + \sin x \sinh y\vec{j}$

12. จงหาลาปลาเซียนของฟังก์ชันต่อไปนี้

12.1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ 12.2) xz/y

12.3) e^{xyz} 12.4) $\sin x \cosh y$

13. จงหาเคิร์ลของฟังก์ชันต่อไปนี้

13.1) $y\vec{i} + 2x\vec{j}$ 13.2) $\sin y\vec{i} + \cos x\vec{j}$

13.3) $e^{xyz}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ 13.4) $e^x(\cos z\vec{j} + \sin z\vec{k})$

13.5) $y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$